§18. Екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеулер

(Екінші ретті СБДТ).

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (4.99)$$

түріндегі екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеуді қарастырып, оның шешімдерінің кейбір қасиеттерін тағайындайық.

Теорема 4.2. Егер $y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ функциялары (4.99) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (4.100)$$

(мұнда C_1, C_2 - еркін тұрақтылар) функциясы да осы теңдеудің шешімі болады.

Дәлелдеме. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ функциясы және оның туындыларын (4.99)-дың сол жағына енгізгеннен кейін, төмендегі өрнек шығады:

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + a_1(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + a_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' +$$

$$+a_1(x)\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] +$$

$$+C_2\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

өйткені y_1 мен y_2 (4.99) теңдеуінің шешімдері болғандықтан, соңғы жақшадағы өрнектер нөлге тепе-тең. Сонымен $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ функциясы да (4.99) теңдеуінің шешімі болады. Теореманың салдары ретінде, егер y_1 және y_2 (4.99) теңдеуінің шешімдері болса, онда $y = y_1 + y_2$ және $y = Cy_1$ функциялары да оның шешімдері екенін айтуымызға болады. Екі еркін тұрақты қамтитын (4.100) функциясы (4.99) теңдеуінің шешімі болып табылады. Осы функция (4.99) теңдеуінің жалпы шешімі бола ма? Бұл сұраққа жауап беру үшін функциялардың сызықтық тәуелділігі және сызықтық тәуелсіздігі ұғымдарын енгізейік.

4.2-анықтама. (*a*, *b*) интервалындағы $y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ функциялары үшін

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \ (\alpha_1, \alpha_2 \in R) \qquad (4.101)$$

теңдігі $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ болғанда және тек сонда ғана орындалса, y_1 және y_2 функциялары сол интервалда ***сызықтық тәуелсіз*** деп аталады. Егер α_1 немесе α_2 сандарының, ең болмағанда, біреуі нөлден өзгеше болып, (4.101) теңдігі орындалса, онда y_1 және y_2 функцияларын сол интервалда ***сызықтық тәуелді*** деп атайды. y_1 және y_2 функциялары пропорционал болғанда ғана барлық $x \in (a, b)$ үшін $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ немесе $y_1 = \lambda y_2, (\lambda = const)$ теңдігі орындалғанда сызықтық тәуелді болатыны айқын. Мәселен, $y_1 = 3e^x$ және $y_2 = e^x$ функциялары - сызықтық тәуелді: $\frac{y_1}{y_2} = 3 = const$; y_1 және $y_3 = e^{2x}$ функциялары - сызықтық тәуелсіз: $\frac{y_1}{y_3} = \frac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq const$; $y_4 = \sin x$ және $y_5 = \cos x$ функциялары - сызықтық тәуелсіз: $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$ теңдігі барлық $x \in R$ үшін тек $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ болғанда ғана орындалады. Олардың сызықтық тәуелсіздігі $\frac{y_4}{y_5} = tgx \neq const$ қатынасынан да байқалады. Функциялар жүйесінің сызықтық тәуелділігін анықтайтын құрал ретінде ***Вронский анықтауышы*** немесе ***вронскиан*** деп аталатын анықтауыш алынады (Ю. Вронский – поляк математигі).

$y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ дифференциалдамалы функциялары үшін вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

түрінде кескінделеді. Келесі теоремалар орынды.

Теорема 4.3. $y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ дифференциалдамалы функциялары (*a, b*) интервалында сызықтық тәуелді болса, онда осы интервалда Вронский анықтауышы нөлге тепе-тең.

Дәлелдеме. y_1 және y_2 функциялары сызықтық тәуелді болғандықтан, онда (4.101) теңдігінде α_1 немесе α_2 мәні нөлден өзгеше. $\alpha_1 \neq 0$ болсын, онда $y_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2$. Сондықтан (*a, b*) интервалына тиіс кез келген *x* үшін

$$W(x) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 & y_2 \\ -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4.4. Егер $y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ функциялары (*a, b*) интервалында (4.99) теңдеуінің сызықтық тәуелсіз шешімдері болса, онда Вронский анықтауышы осы интервалдың ешбір нүктесінде нөлге айналмайды.

Теорема дәлелдемесін келтірмейміз. 4.3 және 4.4 теоремаларынан ***дербес шешімдер сызықтық тәуелсіз болғанда ғана Вронский анықтауышы (a, b) интервалының бірде-бір нүктесінде нөлге тең болмайды.***

Анықтама. Екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеуінің (*a, b*) интервалындағы $y_1(x)$ және $y_2(x)$ дербес шешімдер жиынтығы осы теңдеудің ***іргелі шешімдер жүйесін*** анықтайды: кез келген шешім $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ комбинациясы түрінде кескінделеді.

1-мысал. $y_1 = \sin x$ және $y_2 = \cos x$; $y_3 = 2\sin x$ және $y_4 = 5\cos x$ (олар шексіз көп) дербес шешімдері $y'' + y = 0$ теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесін құрайды; $y_5 = 0$ және $y_6 = \cos x$ дербес шешімдері құрамайды. Енді қандай шарт орындалғанда (4.100) функциясы (4.99) теңдеуінің жалпы шешімі болатынын нақтылап айтуымызға болады.

Теорема 4.5. (***Екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеуі жалпы шешімінің құрылымы***). Егер екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық (4.99) теңдеуінің $y_1 = y_1(x)$ және $y_2 = y_2(x)$ қос дербес шешімі (*a, b*) интервалында іргелі шешімдер жүйесін құрайтын болса, онда осы теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \text{ - еркін тұрақтылар}) \qquad (4.102)$$

функциясы болып табылады.

Дәлелдеме. 4.2-теоремаға сәйкес (4.102) функциясы (4.99) теңдеуінің шешімі болып табылады. Осы шешімнің жалпы екенін, атап айтқанда оның тарапынан берілген

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \; x_0 \in (a, b) \qquad (4.103)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын жалғыз дербес шешімді айырып алуға болатынын дәлелдеу ғана қалып отыр. (4.103) бастапқы шарттарын (4.100) шешіміне енгізгеннен соң, C_1 және C_2 белгісізі бар

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases}$$

теңдеулер жүйесіне келеміз, мұнда $y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0)$. Осы жүйенің

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0)$$

анықтауышы $x = x_0$ болғандағы $W(x)$ вронскиан мәніне тең. $y_1(x)$ және $y_2(x)$ шешімдері (*a, b*) интервалында іргелі шешімдер жүйесін құрайтындықтан, онда 4.4 теоремасына сәйкес $W(x_0) \neq 0$. Сондықтан теңдеулер жүйесі

$$C_1 = C_1^0 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}; \quad C_2 = C_2^0 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}$$

жалғыз шешіміне ие болады. $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ шешімі (4.103) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (4.99) теңдеуінің дербес (жалғыздық теоремасына сәйкес, жалғыз) шешімі болып табылады. Теорема дәлелденді.

2-мысал. 4.5 теоремасы негізінде $y'' + y = 0$ теңдеуінің (1-мысалды қараңыз) жалпы шешімі $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ функциясы болып табылады.

§19. *n*-ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеулер

Табылған нәтижелерді

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (4.104)$$

түрінде кескінделген *n*-ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеулерге пайдалануға болады.

1. Егер $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... , $y_n = y_n(x)$ функциялары (4.104) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ функциясы да оның шешімі болады.

2. $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ теңдігі тек барлық $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ болғанда ғана орындалса, y_1, y_2, ..., y_n функциялары (*a, b*) интервалында ***сызықтық тәуелсіз***, ал қарсы жағдайда (егер α_i сандарының, ең болмағанда, біреуі нөлден өзгеше болғанда) y_1, y_2, ..., y_n функциялары ***сызықтық тәуелді*** деп аталады.

3. Вронский анықтауышының түрі

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

4. Егер (*a, b*) интервалының барлық нүктелері үшін $W(x) \neq 0$ болса, онда (4.104) теңдеуінің y_1, y_2, ..., y_n дербес шешімдері (*a, b*) де іргелі шешімдер жүйесін құрайды.

5. (4.104) СБД теңдеуінің жалпы шешімі $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ түрінде кескінделеді, мұнда C_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ еркін тұрақтылар, y_i - (4.104) теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесін (ІШЖ) құрайтын дербес шешімдері.

Мысал. $y_1 = e^x$, $y_2 = x \cdot e^x$, $y_3 = x^2 \cdot e^x$ функциялары кейбір үшінші ретті СБДТ-нің ІШЖ-сін құрайтынын көрсетіп, сол теңдеуді жазу талап етіледі.

Шешімі. $W(x)$-ті есептеп табамыз:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x & x^2 \cdot e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \cdot (4x + 2 - 4x) = 2e^{3x}.$$

Барлық $x \in R$ үшін $W(x) \neq 0$ болатыны айқын. Демек берілген функциялар үшінші ретті СБДТ-нің ІШЖ-сін құрайды. Үшінші ретті СБДТ-нің жалпы түрі

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0.$$

Осы теңдеуге y_1, y_2, y_3 функцияларын енгізіп, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$ функцияларына қатысты үш теңдеу жүйесін шығарып аламыз. Оны шешкен күнде $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ теңдеуіне келеміз; оның жалпы шешімі

$$y = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x + C_3 x^2 \cdot e^x.$$

§20. Тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті дифференциалдық теңдеулерді интегралдау

Жоғарыда қарастырылған СБДТ-нің дербес жағдайы ретінде тұрақты ***коэффициенттері бар сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеулер*** танылады. Екінші ретті

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (4.105)$$

СБДТ-і берілсін, мұнда p және q – тұрақтылар.

(4.105) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін іргелі шешімдер жүйесін құрайтын оның екі дербес шешімін табу жеткілікті (4.5-теореманы қараңыз). (4.105) теңдеуінің дербес шешімдерін Л. Эйлердің ұсынуынша,

$$y = e^{kx}$$

түрінде іздестіреміз, мұнда k - кейбір сан. Осы функцияны екі рет дифференциалдап, y, y', y'' өрнектерін (4.105) теңдеуіне енгізгеннен соң $k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot ke^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0,$ атап айтқанда

$$e^{kx}\left(k^2 + p \cdot k + q\right) = 0, \text{ немесе } k^2 + p \cdot k + q = 0, \ \left(e^{kx} \neq 0\right) \tag{4.106}$$

теңдеуін шығарып аламыз. (4.106) теңдеуін (4.105) дифференциалдық теңдеуінің ***характеристикалық теңдеуі*** дейді (оны құру үшін (4.105) теңдеуінде y'', y' және y-ті сәйкесінше k^2, k және 1-мен алмастыру жеткілікті). (4.106) характеристикалық теңдеуін шешкенде үш жағдай кездесуі мүмкін.

1-жағдай. (4.106) теңдеуінің түбірлері әртүрлі және нақты:

$k_1 \neq k_2 \left(D = \dfrac{p^2}{4} - q > 0 \right)$. Осы жағдайда (4.105) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = e^{k_2 x}$ функциялары болып табылады.

Олар іргелі шешімдер жүйесін құрайды (сызықтық тәуелсіз), өйткені олар түзейтін вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x}\left(k_2 - k_1\right) \neq 0.$$

Демек (4.105) теңдеуінің жалпы шешімі (4.102) формуласына сәйкес

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{4.107}$$

түрінде жазылады.

1-мысал. $y'' - 5y' + 6y = 0$ теңдеуін шешу талап етіледі.

Шешімі. $k^2 - 5k + 6 = 0$ характеристикалық теңдеуі бойынша оның $k_1 = 2,\ k_2 = 3$ түбірлерін табамыз. Олай болса теңдеудің жалпы шешімі (4.107) формуласына сәйкес $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ (C_1, C_2 - еркін тұрақтылар) түріне келеді.

2-мысал. (4.106) характеристикалық теңдеуінің түбірлері нақты және бір-біріне тең: $k_1 = k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0,\ k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \right)$.

Осы жағдайда бір $y_1 = e^{k_1 x}$ дербес шешіміне ие боламыз. Айта кету керек, y_1 функциясымен бірге $y_2 = xe^{k_1 x}$ функциясы да (4.105) теңдеуінің шешімі болады екен. Расында, y_2 функциясын (4.105) теңдеуіне енгізейік. Сонда

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \left(xe^{k_1 x}\right)'' + p\left(xe^{k_1 x}\right)' + q\left(xe^{k_1 x}\right) = \left(2k_1 e^{k_1 x} + xk_1^2 e^{k_1 x}\right) +$$
$$+ p\left(e^{k_1 x} + xk_1 e^{k_1 x}\right) + q\left(xe^{k_1 x}\right) = e^{k_1 x}\left[x\left(k_1^2 + p \cdot k_1 + q\right) + \left(p + 2k_1\right)\right].$$

Мұнда k_1 (4.106) теңдеуінің түбірі болғандықтан $k_1^2 + p \cdot k_1 + q = 0$, ал шарт бойынша $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ болса, $p + 2k_1 = 0$. Сондықтан $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, атап айтқанда $y_2 = xe^{k_1 x}$ функциясы (4.105) теңдеуінің шешімі болатынын көріп отырмыз. $y_1 = e^{k_1 x}$ және $y_2 = xe^{k_1 x}$ дербес шешімдері іргелі шешімдер жүйесін құрайды: $W(x) = e^{2k_1 x} \neq 0$. Демек осы жағдайда СБД (4.105) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \tag{4.108}$$

түріне ие болады.

3-жағдай. (4.106) теңдеуінің k_1 және k_2 түбірлері - комплексті:

$$k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i, \left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0,\ \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \right).$$

Осы жағдайда (4.105) теңдеуінің дербес шешімдері болып $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$ және $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ функциялары алынады. Эйлердің (ІІІ тарау)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

формулалары бойынша

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(4.105) теңдеуінің екі нақты дербес шешімін табайық. Ол үшін y_1 және y_2 шешімдерінің

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \tilde{y}_1 \text{ және } \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \tilde{y}_2$$

сызықтық комбинацияларын құрамыз. $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ функциялары (4.105) теңдеуінің шешімі болатыны екінші ретті сызықтық біртектес дифференциалдық теңдеулер шешімдері қасиеттерінен туындайды (4.2-теореманы қараңыз). Осы $\tilde{y}_1$ және $\tilde{y}_2$ шешімдері $W(x) \neq 0$ болуы себепті іргелі шешімдер жүйесін түзейді (өз бетіңізбен көз жеткізіңіз).

Сондықтан (4.105) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ \textit{немесе}}$$

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) \tag{4.109}$$

түрінде жазылады.

2-мысал. $y'' - 6y' + 25y = 0$ теңдеуін шешу талап етіледі.

Шешімі. $k^2 - 6k + 25 = 0$ теңдеуін шешкеннен $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$ түбірлері шығады. (4.109) формуласы бойынша теңдеудің жалпы шешімін $y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right)$ түрінде шығарып аламыз.

Сонымен, тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті СБД (4.105) теңдеуінің жалпы шешімін табу интегралдарды есептемейақ, (4.106) характеристикалық теңдеуінің түбірлерін табуға және (4.107) – (4.109) түріндегі теңдеудің жалпы шешімі формулаларын пайдалануға келтіріледі.

§21. Тұрақты коэффициенттері бар n-ретті СБД теңдеулерді интегралдау

Тұрақты коэффициенттері бар n-ретті (n>2)

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (4.110)$$

$$p_i \ (i = 1,2,\ldots,n) - \text{сандар}$$

СБД теңдеулердің жалпы шешімін табу есебі тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті теңдеу жағдайына ұқсас шешіледі. Қажетті тұжырымдамалар жасап, мысалдар қарастырайық. (4.110) теңдеуінің дербес шешімдерін бұрынғыша $y = e^{kx}$ (k - тұрақты сан) түрінде іздестіреміз. (4.110) теңдеуі үшін характеристикалық теңдеу алгебралық n-ретті

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0 \qquad (4.111)$$

теңдеуі болып табылады. (4.111) теңдеуінің n түбірі болатыны және олардың арасында комплекстілері кездесетіні белгілі. Барлық түбірлерін $k_1, k_2, \ldots, k_n$ арқылы белгілейміз.

Ескерту. (4.111) теңдеуі түбірлерінің барлығы түрлі болуы міндетті емес. Мәселен, дербес жағдайда $(k-4)^2 = 0$ теңдеуінің екі бірдей $k_1 = k_2 = 4$ түбірі бар. Бұл жағдайда түбірі біреу $(k = 4)$, және оның еселігі $m_k = 2$ дейді. Еселігі бірге тең: $m_k = 1$ болатын түбірді ***қарапайым түбір*** дейді.

1-жағдай. (4.111) теңдеуі түбірлерінің барлығы нақты және қарапайым (әртүрлі) болсын. Онда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$ функциялары (4.110) теңдеуінің дербес шешімдері болып, іргелі шешімдер жүйесін құрайды (сызықтық тәуелсіз). Сондықтан (4.110) теңдеуінің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

түрінде жазылады.

1-мысал. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ характеристикалық теңдеуінің шешімдері $k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2.$ Демек берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}.$$

2-жағдай. Характеристикалық теңдеу түбірлерінің барлығы нақты болғанымен, арасында қарапайым еместері де бар ($m > 1$ еселігі бар түбірлер кездеседі). Онда әрбір қарапайым k түбіріне e^{kx} түріндегі дербес шешім сәйкес келсе, әрбір $m > 1$ еселігі бар k түбіріне

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2 e^{kx},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{kx}$$

түріндегі, жалпы саны m болатын дербес шешім сәйкес келеді.

2-мысал. $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. $k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k+2)(k-1)^3 = 0$ характеристикалық теңдеуінің түбірлері $k_1 = -2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1,\ k_4 = 1.$ Демек берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} + C_4 x^2 e^{x}.$$

3-жағдай. (4.111) теңдеуінің түбірлері арасында комплекс-түйіндестері бар. Онда қарапайым комплекс-түйіндес $\alpha \pm \beta i$ түбірлері жұбына $e^{\alpha x}\cos\beta x$ және $e^{\alpha x}\sin\beta x$ дербес шешімдер жұбы сәйкес келіп, әрбір $m > 1$ еселігі бар $\alpha \pm \beta i$ түбірлер жұбына

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

түріндегі, жалпы саны $2m$ болатын дербес шешімдер сәйкес келеді. Осы шешімдер іргелі шешімдер жүйесін құрайтыны белгілі.

3-мысал. $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$ теңдеуін шешу талап етіледі.

Шешімі. Характеристикалық теңдеу

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

түрінде жазылып, $k_1=-1,\ k_2=i,\ k_3=-i,\ k_4=i,\ k_5=-i$ түбірлеріне ие болады.

Демек теңдеудің жалпы шешімі

$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4x\cos x+C_5x\sin x$$

түрінде жазылады.

§22. Сызықтық біртектес емес дифференциалдық теңдеулер (СБЕДТ)

22.1. Екінші ретті сызықтық біртектес емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы

Екінші ретті сызықтық біртектес емес

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \qquad (4.112)$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $a_1(x),\ a_2(x),\ f(x)$ - ($a,\ b$) интервалында берілген үзіліссіз функциялар. Сол жағы сызықтық біртектес емес (4.112) теңдеуінің сол жағымен беттесетін

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (4.113)$$

теңдеуін оған сәйкес ***біртектес теңдеу*** дейді.

Теорема 4.6. (***СБЕД теңдеуі жалпы шешімінің құрылымы***). (4.112) теңдеуінің y жалпы шешімі оның кез келген y^* дербес шешімі мен оған сәйкес біртектес (4.113) теңдеуінің $\tilde{y}=C_1y_1+C_2y_2$ жалпы шешімінің қосындысына тең, атап айтқанда

$$y=y^*+\tilde{y}\,. \qquad (4.114)$$

(4.114) функциясы (4.112) теңдеуінің шешімі болатынына көз жеткізейік. (4.112) теңдеуінің шешімі y^* болып, (4.113) теңдеуінің шешімі $\tilde{y}$ болғандықтан, онда

$$\left(y^*\right)''+a_1(x)\left(y^*\right)'+a_2(x)y^*=f(x) \text{ және}$$

$$\left(\tilde{y}\right)''+a_1(x)\left(\tilde{y}\right)'+a_2(x)\tilde{y}=0$$

болады. Мұндай жағдайда

$$\left(y^*+\tilde{y}\right)''+a_1(x)\left(y^*+\tilde{y}\right)'+a_2(x)\left(y^*+\tilde{y}\right)=\left[\left(y^*\right)''+a_1(x)\left(y^*\right)'+a_2(x)y^*\right]+$$

$$+\left[\left(\tilde{y}\right)''+a_1(x)\left(\tilde{y}\right)'+a_2(x)\tilde{y}\right]=f(x)+0=f(x),$$

ал мұның өзі $y^*+\tilde{y}$ функциясы (4.112) теңдеуінің шешімі екендігін білдіреді. Ал енді

$$y=y^*+C_1y_1+C_2y_2 \tag{4.115}$$

функциясы (4.112) теңдеуінің жалпы шешімін кескіндейтінін көрсетейік. Ол үшін (4.115) шешімінен

$$y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0) \tag{4.116}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын жалғыз дербес шешімді айырып алуға болатынын дәлелдеген жөн. (4.115) функциясын дифференциалдап, (4.116) бастапқы шарттарын (4.115) функциясы мен оның туындысына енгізген күнде C_1, C_2 белгісізі бар

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y_0-y^*(x_0), \\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=y_0'-\left(y^*\right)'(x_0) \end{cases}$$

теңдеулер жүйесіне келеміз, мұнда $y_0=y(x_0),\ y_0'=y'(x_0)$. Осы жүйенің анықтауышы $x=x_0$ нүктесінде $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары үшін алынған $W(x_0)$ Вронский анықтауышы болып табылады. $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функциялары сызықтық тәуелсіз (іргелі шешімдер жүйесін түзейді), атап айтқанда $W(x_0)\neq 0$. Демек жүйе жалғыз шешімге ие болады: $C_1=C_1^0$ және $C_2=C_2^0$.

$y=y^*+C_1^0y_1(x)+C_2^0y_2(x)$ шешімі (4.116) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (4.112) теңдеуінің дербес шешімі болып табылады. Теорема дәлелденді.

22.2. Еркін тұрақтыларды вариациялау әдісі

Сызықтық біртектес емес (4.112) дифференциалдық теңдеуін қарастырайық. Оның жалпы шешімі (4.114) функциясы болып табылады, атап айтқанда

$$y = y^* + \tilde{y}\,.$$

(4.112) теңдеуінің y^* дербес шешімін, сәйкес біртектес (4.113) теңдеуінің $\tilde{y}$ жалпы шешімі белгілі болған жағдайда, еркін тұрақтыларды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі) бойынша төмендегідей табуға болады. $\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - (4.113) теңдеуінің жалпы шешімі болсын. Жалпы теңдеудегі C_1 және C_2 тұрақтыларын

$$y^* = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) \tag{4.117}$$

функциясы (4.112) теңдеуінің шешімі болатындай $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларына алмастырамыз. Осы функцияның

$$\left(y^*\right)' = C_1'(x)\,y_1(x) + C_1(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + C_2(x)\,y_2'(x)$$

туындысын табамыз. $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларын

$$C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0 \tag{4.118}$$

болатындай аламыз. Сонда

$$\left(y^*\right)' = C_1(x)\,y_1'(x) + C_2(x)\,y_2'(x),$$

$$\left(y^*\right)'' = C_1'(x)\,y_1'(x) + C_1(x)_1\,y''(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + C_2(x)\,y_2''(x).$$

$y^*, \left(y^*\right)'$ және $\left(y^*\right)''$ өрнектерін (4.112)-ге енгізген шақта

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_1(x)_1\,y''(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + C_2(x)\,y_2''(x) +$$

$$a_1(x)\left[C_1(x)\,y_1'(x) + C_2(x)\,y_2'(x)\right] + a_2(x)\left[C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)\right] = f(x),$$

немесе

$$C_1(x)\left[y_1''(x) + a_1(x)\,y_1'(x) + a_2(x)\,y_1(x)\right] + C_2(x)\left[y_2''(x) + a_1(x)\,y_2'(x) + a_2(x)\,y_2(x)\right] +$$

$$+C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x).$$

$y_1(x)$ және $y_2(x)$ - (4.113) теңдеуінің шешімдері болатындықтан, квадрат жақшалардағы өрнектер нөлге тең, олай болса

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \tag{4.119}$$

Сонымен, $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функциялары (4.118) мен (4.119) теңдеулерін қамтитын

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \tag{4.120}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандырғанда, (4.117) функциясы (4.112) теңдеуінің y^* дербес шешімі болады. Жүйе анықтауышы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'(x)_1 & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, өйткені бұл - (4.113) теңдеуінің $y_1(x)$ және

$y_2(x)$ дербес шешімдер іргелі жүйесіне құрылған Вронский анықтауышы. Сондықтан (4.120) жүйесі жалғыз $C_1'(x)=\varphi_1(x)$ және $C_2'(x)=\varphi_2(x)$ шешіміне ие болады, мұнда $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ - кейбір x-ке тәуелді функциялар. Осы функцияларды интегралдап, $C_1(x)$ және $C_2(x)$ функцияларын табамыз, ал одан соң (4.117) формуласы бойынша (4.112) теңдеуінің дербес шешімін құрамыз.

Мысал. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. Сәйкес $y''+y=0$ біртектес теңдеуінің $\tilde{y}$ жалпы шешімін табамыз. $k^2+1=0$ теңдеуінен $k_1=i,\ k_2=-i$. Демек $\tilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$. Енді бастапқы теңдеудің y^* дербес шешімін табамыз. Ол (4.117) түрінде іздестіріледі: $y^*=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. $C_1(x)$ және $C_2(x)$-ті табу үшін (4.120) түріндегідей

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

жүйесін құрамыз және оны шешеміз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}=-tgx,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x}\end{vmatrix}=1,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x\end{vmatrix}=-tgx,$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-tgx\ \Rightarrow\ C_1(x)=\int(-tgx)dx=\ln|\cos x|;$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1\ \Rightarrow\ C_2(x)=\int 1\cdot dx=x.$$

Берілген теңдеудің дербес шешімі

$$y^*=\ln|\cos x|\cos x+x\sin x$$

түрінде жазылады. Демек берілген теңдеудін жалпы шешімі

$$y=\left(\tilde{y}+y^*\right)=C_1\cos x+C_2\sin x+\ln|\cos x|\cos x+x\sin x$$

түріне келеді. СБЕД теңдеулерінің дербес шешімдерін іздеп табуда келесі теорема пайдалы болуы мүмкін.

Теорема 4.7. (шешімдердің қабаттасуы жөнінде). Егер (4.112) теңдеуінің оң жағы екі функцияның қосындысы түрінде кескінделсе, атап айтқанда $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ болса, ал y_1^* және y_2^* функциялары сәйкесінше $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)$ және $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_2(x)$ теңдеулерінің дербес шешімдері болса, онда $y^*=y_1^*+y_2^*$ функциясы берілген теңдеудің шешімі болып табылады. Расында,

$$\left(y_1^*+y_2^*\right)''+a_1(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)'+a_2(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)=\left[\left(y_1^*\right)''+a_1(x)\left(y_1^*\right)'+a_2(x)y_1^*\right]+$$

$$+\left[\left(y_2^*\right)''+a_1(x)\left(y_2^*\right)'+a_2(x)y_2^*\right]=f_1(x)+f_2(x)=f(x).$$

§23. Тұрақты коэффициенттері және арнайы оң жағы бар екінші ретті сызықтық біртектес емес дифференциалдық теңдеулерді интегралдау

Екінші ретті тұрақты коэффициенттері бар сызықтық біртектес емес

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{4.121}$$

теңдеуін қарастырайық, мұнда p және q - кейбір сандар.

4.6-теоремаға сәйкес (4.121) теңдеуінің жалпы шешімі сәйкес біртектес теңдеудің $\tilde{y}$ жалпы шешімі мен біртектес емес теңдеудің y^* дербес шешімінің қосындысы түрінде кескінделеді. (4.121) теңдеуінің дербес шешімі еркін тұрақтыларды вариациялау әдісімен табылуы мүмкін (§17.2). Тұрақты коэффициенттері бар (4.121) теңдеулері үшін y^*-ті табудың неғұрлым қарапайым әдісі бар. Оны (4.121) теңдеуінің $f(x)$ оң жағы арнайы түрде кескінделгенде жүзеге асыруға болады.

$f(x)$ оң жағы

I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$,

II. $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x\right)$

түрінде кескінделген жағдайларға тоқталамыз. ***Анықталмаған коэффициенттер әдісі*** деп аталатын әдістің мән-мағынасы төмендегідей:

Күтілетін дербес шешімді (4.121) теңдеуінің оң жақ нұсқасына келтіріп жазады, одан соң оны (4.121) теңдеуіне енгізіп, шыққан тепе-теңдіктен коэффициенттер мәнін анықтайды.

1-жағдай. (4.121) теңдеуінің оң жағы $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, түрінде кескінделген, мұнда $\alpha \in R, P_n(x)$ - n-дәрежелі көпмүше. (4.121) теңдеуі

$$y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \tag{4.122}$$

түрінде жазылады. Осы жағдайда y^* дербес шешімін

$$y^* = x^r Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \tag{4.123}$$

түрінде іздестіреміз, мұндағы r дегеніміз - α түбірінің еселігін көрсететін сан, ал $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ дегеніміз - A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ анықталмаған коэффициенттері бар n-дәрежелі көпмүше.

α-ның түбір болу-болмауына және түбірдің еселігіне байланысты кездесетін мүмкіндіктер:

а) α саны $k^2 + p\cdot k + q = 0$ характеристикалық теңдеуінің түбірі болмайды деп ұйғарайық, атап айтқанда $\alpha \neq k_{1,2}$ болсын. Онда

$$r = 0,\ y^* = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x},\ \left(y^*\right)' = Q_n'(x)\cdot e^{\alpha x} + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha,$$

$$\left(y^*\right)'' = Q_n''(x)\cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\alpha^2.$$

y^* функциясы мен оның туындыларын (4.122)-ге енгізіп, $e^{\alpha x}$ -ке қысқартқаннан кейін

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + \left(\alpha^2 + p\alpha + q\right)Q_n(x) = P_n(x). \quad (4.124)$$

(4.124)-тің сол жағы анықталмаған коэффициенттері бар n-дәрежелі көпмүше, оң жағы – белгілі коэффициенттері бар n-дәрежелі көпмүше. x-тің бірдей дәрежелері тұсындағы коэффициенттерді теңестіріп, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ коэффициенттерін анықтау үшін (n+1) алгебралық теңдеулер жүйесін шығарып аламыз.

б) α саны $k^2 + p\cdot k + q = 0$ характеристикалық теңдеуінің бір еселі (қарапайым) түбірі болсын, атап айтқанда $\alpha = k_1 \neq k_2$ деп ұйғарайық. Мұндайда шешімді $y^* = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$ түрінде іздеуге болмайды, өйткені $\alpha^2 + p\cdot\alpha + q = 0$ және (4.124) теңдеуі

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) = P_n(x).$$

түріне келеді. Сол жағында (n - 1)-дәрежелі көпмүше болса, оң жағында n-дәрежелі көпмүше. y^* шешімінде көпмүшелердің тепе-теңдігіне қол жеткізу үшін (n+1)-дәрежелі көпмүшеге ие болуымыз керек. Сондықтан y^* дербес шешімін $y^* = x\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$ түрінде іздейтін боламыз ((4.123) теңдігінде r = 1 деп ұйғарылған).

в) Енді α саны $k^2 + p\cdot k + q = 0$ характеристикалық теңдеуінің екі еселі түбірі болсын, атап айтқанда $\alpha = k_1 = k_2$ деп ұйғарайық. Мұндайда $\alpha^2 + p \cdot \alpha + q = 0$ және $2\alpha + p = 0$, сондықтан (4.124) теңдеуі $Q_n''(x) = P_n(x)$. түріне келеді. Сол жағында (n - 2)-дәрежелі көпмүше тұр. Сол жағында n-дәрежелі көпмүше болу үшін y^* дербес шешімін

$$y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

түрінде іздестірген орынды ((4.123) теңдігінде r = 2 деп ұйғарылады).

2-жағдай. (4.121) теңдеуінің оң жағы

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x\right)$$

түрінде кескінделген болсын, мұнда $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ - сәйкесінше n және m-дәрежелі көпмүшелер, α және β - нақты сандар. (4.121) теңдеуі

$$y'' + py' + qy == e^{\alpha x}\left(P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x\right) \quad (4.125)$$

түрінде жазылады. Осы жағдайда (4.125) теңдеуінің y^* дербес шешімін

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x}\left(M_l(x) \cdot \cos \beta x + N_l(x) \cdot \sin \beta x\right) \quad (4.126)$$

түрінде іздестірілетінін көрсетуге болады, мұндағы r саны $k^2 + p \cdot k + q = 0$ характеристикалық теңдеуіндегі $\alpha + \beta i$ түбірінің еселігі, $M_l(x)$ және $N_l(x)$ - анықталмаған коэффициенттері бар l-дәрежелі көпмүшелер, l - $P_n(x)$ және $Q_m(x)$ көпмүшелерінің ең үлкен дәрежесі, атап айтқанда $l = \max(n, m)$.

Ескерту. 1. (4.126) функцияларын (4.125)-ке енгізгеннен кейін, теңдеудің сол жағы мен оң жағында тұрған аттас тригонометриялық функциялар тұсындағы көпмүшелерді теңестіреді.

2. (4.126) өрнегі, $P_n(x) \equiv 0$ немесе $Q_m(x) = 0$ болғанда да өзгермейді.

3. Егер (4.121) теңдеуінің оң жағы I немесе II түріндегі функциялардың қосындысы болып келсе, онда y^*-ті табу үшін шешімдердің қабаттасуы жөніндегі 4.7-теорема қолданылады.

1-мысал. $y'' - 2y' + y = x - 4$ теңдеуінің жалпы шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. Сәйкес біртектес $y'' - 2y' + y = 0$ дифференциалдық теңдеуінің $\tilde{y}$ жалпы шешімін табамыз. $k^2 - 2k + 1 = 0$ характеристикалық теңдеуі екі еселі $k_1 = 1$ түбіріне ие ($k_1 = k_2 = 1$). Олай болса $\tilde{y} = C_1e^x + C_2xe^x$. Енді бастапқы теңдеудің y^* дербес шешімін іздестіреміз. Оның оң жағындағы $x - 4 = (x-4)\cdot e^{0\cdot x}$ өрнегі $P_1(x)\cdot e^{0\cdot x}$ формуласы түрінде жазылған, онымен бірге $\alpha = 0$ саны характеристикалық теңдеудің түбірі болмайды: $\alpha \neq k_1$. Сондықтан (4.123) формуласына сәйкес y^* дербес шешімін $y^* = Q_1(x)\cdot e^{0\cdot x}$ түрінде іздестіреміз, атап айтқанда $y^* = Ax + B$, мұнда A және B - анықталмаған коэффициенттер. Сонда

$\left(y^*\right)' = A, \left(y^*\right)'' = 0.$ $y^*, \left(y^*\right)', \left(y^*\right)''$-ті *бастапқы* теңдеуге

енгізіп, $-2A + Ax + B = x - 4$ немесе $Ax + (-2A + B) = x - 4$ өрнегін шығарып аламыз. Бірдей дәрежелі x тұсындағы коэффициенттерді теңестіріп,

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = -4 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесіне келеміз. Осыдан $A = 1, B = -2.$ Сондықтан берілген теңдеудің дербес шешімі $y^* = x - 2$ түрінде табылады. Демек теңдеудің ізделінді жалпы шешімі

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2xe^x + x - 2$$

түрінде кескінделеді.

2-мысал. $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$ теңдеуінің шешімін табу талап етіледі.

Шешімі. СБЕДТ жалпы шешімінің түрі $y = y^* + \tilde{y}$. Алдымен $y'' - 4y' + 13y = 0$ біртектес теңдеуінің $\tilde{y}$ шешімін табамыз. $k^2 - 4k + 13 = 0$ характеристикалық теңдеуінің түбірлері $k_1 = 2 + 3i,\ k_2 = 2 - 3i$ болғандықтан, $\tilde{y} = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$. Енді y^* дербес шешімін табамыз. СБЕД теңдеуінің оң жағын $f(x) = e^{0\cdot x}\left(40\cos 3x + 0\cdot\sin 3x\right)$ түрінде кескіндеуге болады. $\alpha = 0, \beta = 3,\ \alpha + \beta i = 3i$ сандары характеристикалық теңдеудің түбірлерімен беттеспейтіндік тен, $r = 0$ болады. (4.126) формуласына сәйкес дербес шешімді

$$y^* = A\cos 3x + B\sin 3x *$$

түрінде іздестіреміз. y^* және оның

$$\left(y^*\right)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \left(y^*\right)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

туындыларын бастапқы теңдеуге енгіземіз. Сонда

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) +$$

$$+13\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) = 40\cos 3x$$

немесе

$$\left(-9A - 12B + 13A\right)\cos 3x + \left(-9B + 12A + 13B\right) = 40\cos 3x + 0 \cdot \sin 3x$$

болатыны шығады. Бұдан

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0. \end{cases}$$

Демек $A = 1, B = -3$. Сондықтан $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$, ал жалпы шешім

$$y = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \cos 3x - 3\sin 3x$$

түріне келеді.

Мысалдар. Төменде келтірілген дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін анықтаңыз.

а) $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$,   в) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$,

б) $y'' - 2y' + y = 2$,   г) $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$

д) $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

Жауаптары:

а) $A + xBe^x$,   в) $x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + C\cos 7x + D\sin 7x$,

б) A,   г) $\left(Ax + B\right)\cos 2x + \left(Cx + D\right)\sin 2x$,

д) $x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + D\cos x + E\sin x$

§24. Тұрақты коэффициенттері және арнайы оң жағы бар n-ретті (n>2) сызықтық біртектес емес дифференциалдық теңдеулерді интегралдау

n-ретті (n>2) сызықтық біртектес емес

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық, мұнда $a_1(x),\, a_2(x),...,a_n(x), f(x)$ - (a, b) интервалында берілген үзіліссіз функциялар. Осы теңдеуге сәйкес біртектес теңдеу

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

түрінде жазылады.

***Теорема 4.8*. (*n-ретті СБЕД теңдеуі жалпы шешімінің құрылымы жөнінде*).** СБЕД теңдеуінің y жалпы шешімі оның кез келген y^* дербес шешімі мен оған сәйкес біртектес теңдеуінің $\tilde{y}$ жалпы шешімінің қосындысына тең, атап айтқанда

$$y=y^*+\tilde{y}\,.$$

n-ретті СБЕД теңдеуінің y^* дербес шешімі сәйкес біртектес теңдеудің $\tilde{y}$ жалпы шешімі белгілі болған жағдайда еркін тұрақтыларды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі) көмегімен табылуы мүмкін. Ол

$$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+...+C_n(x)y_n(x)$$

түрінде іздестіріледі, мұнда $y_i(x),\ (i=1,2,...,n)$ дегеніміз - біртектес теңдеудің іргелі шешімдер жүйесін түзейтін дербес шешімдері. $C_i(x)$ белгісіздерін анықтауға қажет теңдеулер жүйесінің түрі:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+...+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x) \end{cases}$$

Алайда тұрақты коэффициенттері және арнайы оң жағы бар n-ретті СБЕД теңдеу үшін y^* дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісі бойынша табуға болады. Тұрақты Pi коэффициенттері және арнайы оң жағы бар

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

теңдеуінің y^* дербес шешімін таңдау әдісі, 23 параграфта $n = 2$ жағдайына көрсетілгендей, теңдеу реті $n > 2$ болғанда да өзгеріссіз қала береді.

Мысал. $y^{IV} - y' = 2x$ теңдеуін шешу керек.

Шешімі. $\tilde{y}$ -ті табамыз:

$$k^4 - k = k(k-1)(k^2+k+1) = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Енді y^* -ті табамыз:

$$f(x) = 2x (= e^{0\cdot x} \cdot P_1(x)),\ r = 1,\ y^* = x(Ax+B) = (Ax^2 + Bx)$$

Осыдан

$$(y^*)' = 2Ax + B,\ (y^*)'' = 2A,\ (y^*)''' = 0,\ (y^*)^{IV} = 0$$

Сонда $-(2Ax+B) = 2x$. Бұдан $A = -1, B = 0$. Демек $y^* = -x^2$, ал y жалпы шешімі

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - x^2$$

түрінде жазылады.